Eksponentielle funktioner del 3

$$y = b * a^x$$

Beregning af x
I de tidligere opgaver har I skulle beregne:
en slutværdi, **y**
en startværdi, **b**
en fremskrivningsfaktor, **a**

I denne del skal i lære at beregne x, antal fremskrivninger

X fortæller altså antallet af gange, at der tilføres en procentmæssig-stigning eller fald

Formlen for at beregne x, ser således ud

$$x = \frac{log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{log(a)}$$

Omskrevet kan det skrives således:

$$antal\ fremskrivninger = \frac{log\left(\frac{slutværdi}{startværdi}\right)}{log(fremskrivningsfaktor)}$$

”log” er en funktion, en regnemetode. I skal ikke kunne forstå den, bare bruge det. Hurtigt fortalt, så finder ”log” den eksponent (potens), som et tal er opløftet i. Der findes en LOG-tast på din lommeregner, som du skal bruge.

Et eksempel:
Rige Ronny vil gerne finde ud af hvor lang tid hans penge skal stå i banken før at beløbet når 1 mio.kr. Ronnys bank giver ham 4% i rente pr. år, og på nuværende tidspunkt står der 465.000kr.

a, fremskrivningsfaktoren er derfor 1,04 (1+renten som decimal)
y_1, startbeløb er: 465.000kr
y_2, slutbeløb er: 1.000.000kr

Disse informationer indsættes i formlen: *Husk alle decimaler i mellemregningen*

$$x = \frac{log\left(\frac{1.000.000}{465.000}\right)}{log(1{,}04)} \Leftrightarrow x = \frac{log(2{,}15053763)}{log(1{,}04)} \Leftrightarrow x = \frac{0{,}33254705}{0{,}017033334} \Leftrightarrow \underline{\underline{19{,}5233}}$$

Altså går der 19,5233 år

Ligesom andre gange når der regnes med tid, så omskrives ”decimal-resten”, i dette tilfælde er decimalresten 0,523333 år. Ganges 0,523333 med 365 (antal dage på et år)
0,523333*365=191
Altså går der præcis **19 år og 191** dage før at der står 1 mio. Kr. på Rige Ronnys konto.

Opgaver

Eksponentielle funktioner del 3

$$\boldsymbol{y = b * a^x}$$

a) Beregn hvor lang tid det tager de berygtede matematik-bakterier, at vokse fra 550 bakterier til 10.000.000 bakterier, hvor de vokser med 20% pr. minut.
b) Jordens befolkning vokser med 1,2 % pr. år. I dag er der 7,5 mia. Mennesker. Hvor mange år går der før jordens befolkning er oppe på 10. Mia mennesker?
c) Isen på Arktis smelter med 7 % om året. I dag er der 14.000.000 km^2. Hvor mange år går der før, at der kun er 8.000.0000 km^2 is tilbage?
d) Villa-Vera har købt en villa til 4 mio. Kr. Desværre falder husmarkedet med 3% hvert kvartal (hver 3. Måned). Hvor mange kvartaler går der før Veras huspris er halveret?

Halveringstid og fordoblingstid
Dét der typisk er interessant er hvor lang tid går der før noget er fordoblet eller halveret. Altså "hvor lang tid går der før at mine penge er blevet det dobbelte værd" – eller " hvor lang tid går der før at antallet af zombier er halveret"

Når noget fordobles sker det med faktor 2 (altså der ganges med 2), når noget skal 3-dobles sker det med faktor 3 osv. Når noget halveres, så sker det med faktor 0,5 (altså der ganges med 0,5) Derfor ser formlerne for halvering og fordobling således ud:

$$fordoblingskonstant, \qquad T_2 = \frac{log(2)}{log(a)}$$

$$halveringskonstant, \qquad T_{0,5} = \frac{log(2)}{log(a)}$$

Hvorfor hedder det konstanter? Jo, det tager lige så lang tid for 1000kr at blive til 2000kr, som det tager 5000kr at blive til 10.000kr, hvis altså renten er den samme. Det samme gælder ved halvering.

Du kan afprøve det ved disse opgaver

a) Hvor lang tid går der før at Peters penge er blevet fordoblet. I dag står der 2000kr på kontoen, og renten er 4% om året.
b) Hvor lang tid gør der før at Pia´s penge bliver fordoblet? Hun har samme bank som Peter og får derfor også 4 % om året. Pia har dog 5000kr på kontoen, som hun gerne vil have fordoblet. Hvornår sker det?

Eksponentielle funktioner del 3

$$y = b * a^x$$

Skæring mellem 2 eksponentielle funktioner
En sidste ting, der kan være interessant, men som ikke indgår direkte i pensum: hvordan kan skæringspunktet mellem 2 eksponentielle funktioner beregnes? Altså samme spørgsmål ligesom ved lineære funktioner.

Et eksempel kunne være:
Baobabtræet på 3 meter bliver plantet, og vokser med 5 % om året. Ved siden af baobabtræet bliver der plantet en kæmpe-Eg på 8 meter, som dog kun vokser med 3% om året. Hvornår er disse to træer lige høje?

Formlen der skal bruges er:

$$x = \frac{log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)}{log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

Hvorfor formlen så således kan ses nederst.

Lad os prøve at beregne hvornår de 2 træer er lige høje:
Det vi ved om Baobab-træet, vi kalder det var 1
a_1=1,05
b_1=3
Om kæmpe-Egen ved vi, vi kalder det for 2
a_2=1,03
b_2=8

Vi indsætter tallene i formlen: *husk alle decimaler i mellemregninger*

$$x = \frac{log\left(\frac{3}{8}\right)}{log\left(\frac{1,03}{1,05}\right)} \Leftrightarrow x = \frac{log(0,375)}{log(0,98095238)} \Leftrightarrow x = \frac{-0,425987}{-0,0083521} \Leftrightarrow 51$$

Der går altså 51år før at de 2 træer er lige store. Prøv at se efter i geogebra.

Opgaver:

a) I Danmark er der 5,6 mio. Mennesker (tal fra 2013), og befolkningen stiger med 3% pr. år. I Sverige er der 9,6 mio. (tal fra 2013). Mennesker, men stigningen er kun 1%- hvornår er der lige så mange mennesker i Danmark og Sverige?
b) På 2 øer bor der rotter. På den ene ø, lille-ø, er der 2000 rotter, hvor antallet stiger med 5% om måneden. På den anden ø, store-ø, er der 8500 rotter, hvor antallet kun stiger med 2,5% om måneden. Hvornår er der lige mange rotter på begge ø´er?
c) De 2 venner, Anton og Birger, har købt 2 computere: en macbook og en windows-pc. Macbook´en koster 12.000kr fra ny, men falder med 8% pr halve år. Windows-PC´en koster 15.000kr fra ny, men falder med 17% pr halve år. Hvornår er begge computere lige meget værd?

Eksponentielle funktioner del 3

$$y = b * a^x$$

Bevis af formlen for hvordan man beregner skæringspunktet. Prøv at gennemgå den i par, og se om I kan følge forklaringen.

Skæringspunkt mellem 2 eksponentielle funktioner

Vi har 2 eksponentielle funktioner: $Y_1=b_1 \cdot a_1^x$ og $Y_2=b_2 \cdot a_2^x$

y_2 og y_1 sættes lig hinanden

$$b_2 \cdot a_2^x = b_1 \cdot a_1^x$$

$$a_2{}^x = \frac{b_1 \cdot a_1{}^x}{b_2}$$

$$\frac{a_2{}^x}{a_1{}^x} = \frac{b_1}{b_2}$$

Regneregel: fælles eksponent uden for parentes

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x = \frac{b_1}{b_2}$$

Logaritme-regel: $\log(a^x)=x \cdot \log(a)$: Tag logaritmen på begge sider

$$x \cdot log\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$$

derfor:

$$x = \frac{log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)}{log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)}$$